

Bài 3. NHỊ THỨC NIU – TƠN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Công thức nhị thức Niu-tơn

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n \quad (1)$$

Hệ quả:

Với $a = b = 1$, thì ta có $2^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$.

Với $a = 1; b = -1$, ta có $0 = C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^k C_n^k + \dots + (-1)^n C_n^n$

Chú ý: Trong biểu thức ở vế phải của công thức (1):

a) Số các hạng tử là $n+1$

b) Các hạng tử có số mũ của a giảm dần từ n đến 0 , số mũ của b tăng dần từ 0 đến n , nhưng tổng các số mũ của a và b trong mỗi số hạng bằng n (quy ước $a^0 = b^0 = 1$)

c) Các hệ số của mỗi hạng tử cách đều hai hạng tử đầu và cuối thì bằng nhau: $C_n^k = C_n^{n-k}$

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1: Khai triển biểu thức:

a) $(a+2b)^5$

b) $(2x-3)^4$

Giải:

$$\begin{aligned} \text{a) } (a+2b)^5 &= C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4 (2b) + C_5^2 a^3 (2b)^2 + C_5^3 a^2 (2b)^3 + C_5^4 a (2b)^4 + C_5^5 (2b)^5 \\ &= a^5 + 10a^4 b + 40a^3 b^2 + 80a^2 b^3 + 160ab^4 + 32b^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (2x-3)^4 &= C_4^0 (2x)^4 + C_4^1 (2x)^3 (-3) + C_4^2 (2x)^2 (-3)^2 + C_4^3 (2x)(-3)^3 + C_4^4 (-3)^4 \\ &= 16x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81 \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Tìm hệ số của x^2 trong khai triển của biểu thức $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^{10}$

Giải:

$$\text{Số hạng tổng quát của khai triển là: } C_{10}^k (x^2)^{10-k} \left(\frac{2}{x}\right)^k = C_{10}^k 2^k x^{20-3k}$$

Số hạng chứa x^2 tương ứng với $20-3k=2 \Leftrightarrow k=6$

Hệ số cần tìm là: $2^6 C_{10}^6 = 13440$

Ví dụ 3: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của $\left(\frac{1}{x} - 2x^2\right)^{12}$

Giải:

$$\text{Số hạng tổng quát của khai triển là: } C_{12}^k \left(\frac{1}{x}\right)^{12-k} (-2x^2)^k = C_{12}^k (-2)^k x^{3k-12}$$

Số hạng không chứa x tương ứng với $3k-12=0 \Leftrightarrow k=4$

Vậy số hạng không chứa x là: $2^4 C_{12}^4$

Ví dụ 4: Biết hệ số của x^2 trong khai triển của $(1+3x)^n$ là 90. Hãy tìm n .

Giải:

Số hạng tổng quát của khai triển là: $C_n^k (3x)^k = C_n^k 3^k x^k$

Số hạng chứa x^2 là $C_n^2 9x^2$ ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$)

Theo giả thiết ta có :

$$9.C_n^2 = 90 \Leftrightarrow C_n^2 = 10 \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 10 \Leftrightarrow n(n-1) = 20 \Leftrightarrow n^2 - n - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 5 \\ n = -4 \end{cases}$$

So điều kiện ta được $n = 5$

Ví dụ 5: Từ khai triển biểu thức $(3+x)^{50}$ thành đa thức, hãy tính tổng các hệ số của đa thức nhận được

Giải:

Khai triển thành đa thức: $(3+x)^{50} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{50}x^{50}$ (*)

Tổng các hệ số : $S = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{50}$

Thay $x = 1$ vào (*), ta được : $(3+1)^{50} = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{50} \Leftrightarrow S = 4^{50}$

C. BÀI TẬP

I. TỰ LUẬN

Bài 1. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{16} trong khai triển $(x^2 - 2x)^{10}$

Bài 2. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển: $\left(2x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^{10}$

Bài 3. Tìm hệ số của số hạng chứa $x^{25}y^{10}$ trong khai triển $(x^3 + xy)^{15}$

Bài 4. Tìm hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển $(2+5x)\left(1-\frac{x}{2}\right)^8$

Bài 5. Cho biết trong khai triển $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$, tổng các hệ số của số hạng thứ nhất, thứ hai, thứ ba là 46. Tìm số hạng không chứa x .

Bài 6. Biết tổng tất cả các hệ số trong khai triển nhị thức $(x^2+1)^n$ bằng 1024. Hãy tìm hệ số của số hạng chứa x^{12} trong khai triển đó.

Bài 7. Tính các tổng sau :

a) $A = C_n^0 + 5C_n^1 + 5^2C_n^2 + \dots + 5^n C_n^n$

b) $B = 1 - 2^n + 2^2 C_n^2 - 2^3 C_n^3 + \dots + (-1)^n 2^n C_n^n$

c) $C = 3^{17} C_{17}^0 + 4.3^{16} C_{17}^1 + 4^2.3^{15} C_{17}^2 + \dots + 4^{17} C_{17}^{17}$

II. TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $(x+1)^{10}$ là

- A. $C_{10}^5 x^5$. B. $C_{10}^6 x^5$. C. 252. D. 210.

Câu 2: Hệ số của số hạng chứa x^9 trong khai triển $\left(\frac{4}{x} - 3x^3\right)^{15}$ là

- A. $3^6 C_{15}^9 x^9$. B. $3^6 2^{18} C_{15}^9 x^9$. C. $3^6 C_{15}^9$. D. $3^6 2^{18} C_{15}^9$.

Câu 3: Trong bảng khai triển của nhị thức $(x-y)^{11}$, hệ số của $x^8 y^3$ là:

- A. C_{11}^8 . B. C_{11}^3 . C. $C_{10}^7 + C_{10}^8$. D. $-C_{11}^3$.

- Câu 4:** Tổng của số hạng thứ 4 trong khai triển $(5a-1)^5$ và số hạng thứ 5 trong khai triển $(2a-3)^6$ là:
A. $4160a^2$. **B.** $-4610a^2$. **C.** $4610a^2$. **D.** $4620a^2$.
- Câu 5:** Trong khai triển $(x-2)^{100} = a_0 + a_1x + \dots + a_{100}x^{100}$. Hệ số a_{97} là:
A. 1.293.600. **B.** -1.293.600. **C.** $-2^{97} C_{100}^{97}$. **D.** $(-2)^{98} C_{100}^{98}$.
- Câu 6:** Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^n$ biết n là số nguyên dương thỏa mãn
 $C_n^1 + C_n^3 = 13n$.
A. C_{10}^6 . **B.** C_{10}^5 . **C.** C_{10}^{10} . **D.** C_{10}^3 .
- Câu 7:** Giả sử có khai triển $(1-2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Tìm a_5 biết $a_0 + a_1 + a_2 = 71$.
A. $672x^5$. **B.** -672 . **C.** $-672x^5$. **D.** 672 .
- Câu 8:** Tính tổng $S = C_{100}^0 - 5C_{100}^1 + 5^2C_{100}^2 - \dots + 5^{100}C_{100}^{100}$
A. 6^{100} . **B.** 4^{100} . **C.** 2^{300} . **D.** 3^{200} .
- Câu 9:** Đẳng thức nào sau đây **sai**?
A. $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$.
B. $0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n$.
C. $1 = C_n^0 - 2C_n^1 + 4C_n^2 - \dots + (-2)^n C_n^n$.
D. $3^n = C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n$.
- Câu 10:** Khai triển $(2x+y)^5$ ta được kết quả là
A. $32x^5 + 16x^4y + 8x^3y^2 + 4x^2y^3 + 2xy^4 + y^5$.
B. $32x^5 + 80x^4y + 80x^3y^2 + 40x^2y^3 + 10xy^4 + y^5$.
C. $2x^5 + 10x^4y + 20x^3y^2 + 20x^2y^3 + 10xy^4 + y^5$.
D. $32x^5 + 10000x^4y + 8000x^3y^2 + 400x^2y^3 + 10xy^4 + y^5$.
- Câu 11:** Giá trị của n thỏa mãn $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \dots + 2^2C_n^n = 243$. là
A. $n = 7$. **B.** $n = 3$. **C.** $n = 5$. **D.** $n = 4$.
- Câu 12:** Hệ số lớn nhất trong khai triển $(x+2)^{10}$ là
A. C_{10}^5 . **B.** 128. **C.** 15360. **D.** C_{10}^3 .